CANPOINT®

导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学 3

细分课时
分层设计
落实基础
突出重点

选择性必修第一册 BS

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

第一章　直线与圆

§1　直线与直线的方程

1.1　一次函数的图象与直线的方程

1.2　直线的倾斜角、斜率及其关系

第1课时　直线的倾斜角和斜率

【学习目标】

1. 理解直线的倾斜角和斜率的概念.
2. 经历用代数方法刻画直线斜率的过程,掌握过两点的直线斜率的计算公式.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　一次函数的图象与直线的方程**

一般地,一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$的图象是一条直线,它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x,y 的值为坐标的点构成的.同时函数解析式 $y=kx+b$ 可以看作二元一次方程.

◆ **知识点二　直线的倾斜角**

1. 定义:在平面直角坐标系中,对于一条与 x 轴相交的直线 l,把 x 轴(正方向)按逆时针方向绕着交点旋转到和直线 l 首次重合时所成的角,称为直线 l 的倾斜角.
2. 通常倾斜角用 α 表示.当____________时,规定它的倾斜角为0.
3. 倾斜角 α 的取值范围:________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)所有直线都有倾斜角.　(　　)

(2)平行于 x 轴的直线的倾斜角是0°或180°.　(　　)

(3)一个倾斜角 α 不能确定一条直线.　(　　)

◆ **知识点三　直线的斜率**

经过两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$的直线的斜率公式是____________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)任何一条直线有且只有一个斜率和它对应.　(　　)

(2)直线的倾斜角是锐角时,直线的斜率为正;直线的倾斜角是钝角时,直线的斜率为负.　(　　)

(3)经过两点的直线的斜率公式适用于任何直线.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　一次函数的图象与直线的方程**

例1　已知一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 $A(2,0)$,则 b 的值为________.

变式　(多选题)函数 $y=x-2$ 的图象经过的象限有　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

[素养小结]

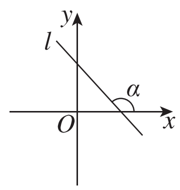
一元一次方程与一次函数的关系

(1)对于一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$,由它的函数值 $y=0$ 就得到关于 x 的一元一次方程 $kx+b=0$,解这个方程可得 $x=-\frac{b}{k}$,于是一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标为$\left(-\frac{b}{k},0\right)$.

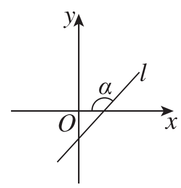
(2)若已知一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$，则一元一次方程 $kx+b=0$ 的根为 $-\dfrac{b}{k}$.

◆ 探究点二　直线的倾斜角

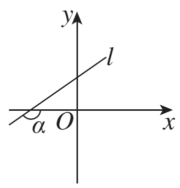
例 2 [2024·内蒙古呼伦贝尔高二期中] 下列图中 α 能表示直线 l 的倾斜角的是　　(　　)



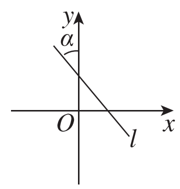
A



B



C



D

变式 1 若直线 l 过点 $A(1,1)$，且不过第四象限，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是　　(　　)

A. $[0,\pi)$　　B. $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

C. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

变式 2 (多选题)若直线 l 与 x 轴交于点 A，其倾斜角为 α，直线 l 绕点 A 按顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 后得到直线 l_1，则直线 l_1 的倾斜角可能为　　(　　)

A. $\alpha+\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\alpha+\dfrac{3\pi}{4}$

C. $\alpha-\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}-\alpha$

[素养小结]

求直线的倾斜角的方法及两点注意

(1)方法：结合图形，利用特殊三角形(如直角三角形)求角.

(2)两点注意：①当直线与 x 轴平行或重合时，倾斜角为 $0°$，当直线与 x 轴垂直时，倾斜角为 $90°$.

②直线倾斜角的取值范围是 $[0°,180°)$.

◆ 探究点三　直线的斜率

例 3 (1)已知直线上两点，求直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角：

①$A(3,5)$，$B(-1,-2)$；

②$C(-3,5)$，$D(3,-1)$.

(2)判断下列三点是否在同一条直线上：

①$A(-3,1)$，$B(2,-4)$，$C(3,0)$；

②$D(5,-1)$，$E(-1,2)$，$F(-5,4)$.

变式 设点 $A(m,-m+3)$，$B(2,m-1)$，$C(-1,4)$，若直线 AC 的斜率等于直线 BC 的斜率的 3 倍，则实数 m 的值为________.

[素养小结]

利用斜率公式求直线的斜率应注意的事项

(1)斜率 k 与两点 P_1，P_2 在直线上的位置无关，即 y_1，y_2 和 x_1，x_2 在公式中的前后顺序可以同时交换，但分子与分母不能交换；

(2)当 $x_1=x_2$ 时，公式右边无意义，直线与 x 轴垂直，直线的倾斜角 $\alpha=90°$，斜率不存在；

(3)当 $y_1=y_2$ 时，直线与 x 轴平行或重合，直线的倾斜角 $\alpha=0°$，斜率 $k=0$.

拓展 已知 $A(1,0)$，$B(2,a)$，$C(a,1)$可以构成三角形，则实数 a 的取值集合为________.

第 2 课时　直线的斜率与倾斜角、方向向量的关系

【学习目标】

1. 理解直线的倾斜角与斜率的关系.
2. 理解利用直线的方向向量来描述直线的倾斜程度.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　直线的斜率与倾斜角的关系

由正切函数的概念可知,倾斜角不是$\frac{\pi}{2}$的直线,它的斜率 k 和它的倾斜角 α 满足________$\left(\text{其中 }\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$.

斜率 k 与倾斜角 α 有如下关系:

当 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时,斜率 $k\geqslant0$,且 k 随倾斜角 α 的增大而________;

当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,斜率 $k<0$,且 k 随倾斜角 α 的增大而________;

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时,直线 l 与 x 轴垂直,此时直线 l 的斜率________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)直线的倾斜角越大,它的斜率也越大;反过来,直线的斜率越大,它的倾斜角也越大.　(　　)

(2)所有的直线都有倾斜角,但不是所有的直线都有斜率,倾斜角是 90°的直线不存在斜率.　(　　)

◆ 知识点二　直线的斜率与方向向量的关系

在直线 l 上任取两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,由平面向量的知识可知,向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是直线 l 的方向向量,它的坐标是________.直线的倾斜角 α、斜率 k、方向向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分别从不同的角度刻画一条直线相对于平面直角坐标系中 x 轴的倾斜程度,它们之间的关系是________(其中 $x_1\neq x_2$).若 k 是直线 l 的斜率,则________是它的一个方向向量;若直线 l 的一个方向向量的坐标为(x,y),其中 $x\neq0$,则它的斜率________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)一条直线的方向向量与 x 轴正方向所成的角和直线的倾斜角相等.　(　　)

(2)已知直线上不同两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,可以确定直线的方向,求出直线的一个方向向量,进而可以求出它的斜率.　(　　)

(3)若直线 l 的一个方向向量的坐标为(x_0,y_0),则 l 的斜率为$\frac{y_0}{x_0}$.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　直线的斜率与倾斜角的关系

例 1 (1)过点 $A(2,0)$,$B(-1,\sqrt{3})$的直线的倾斜角为　(　　)

A. 30°　　B. 60°

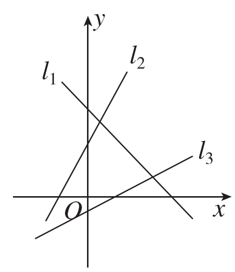
C. 120°　　D. 150°

(2)[2024·江西九江高二期中] 已知直线 l 的斜率 $k\in[-1,\sqrt{3}]$,则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围为　(　　)

A. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

变式 (1)如图,已知直线 l_1,l_2,l_3 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,则　(　　)



A. $k_1<k_2<k_3$

B. $k_3<k_1<k_2$

C. $k_3<k_2<k_1$

D. $k_1<k_3<k_2$

(2)经过点 $P(0,-1)$ 作直线 l，若直线 l 与连接 $A(1,-2)$，$B(2,1)$ 两点的线段总有公共点，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ( )

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

D. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

[素养小结]

1. 由倾斜角大小(或范围)求斜率大小(或范围)利用公式 $k=\tan\alpha(\alpha\neq 90°)$ 求解.

2. 由两点坐标求直线斜率运用斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2)$ 求解.

3. 涉及直线与线段有交点问题常利用数形结合及公式求解.

拓展 [2024·广东佛山高二期中] 直线 $y=2-x\tan 36°$ 的倾斜角为 ( )

A. $36°$　　B. $72°$

C. $108°$　　D. $144°$

◆ 探究点二　直线的斜率与方向向量的关系

例 2 (1) 已知直线 l 经过两点 $A(-1,2)$，$B(3,4)$，则直线 l 的一个方向向量的坐标是 ( )

A. $(2,-4)$　　B. $(1,2)$

C. $(-4,-2)$　　D. $(4,-2)$

(2)(多选题)直线 $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ 的一个方向向量的坐标是 ( )

A. $(2,3)$　　B. $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$

C. $(-3,-2)$　　D. $(-3,2)$

变式 (1)过 $A(4,y)$，$B(2,-3)$ 两点的直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1)$，则 $y=$ ( )

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. -1　　D. 1

(2)直线 $l:y=kx$ 过点 $A(2,2)$，则直线 l 的一个方向向量的坐标为________.

[素养小结]

一般地，如果已知 $\boldsymbol{a}=(u,v)$ 是直线 l 的一个方向向量，那么：

(1)当 $u=0$ 时，显然直线 l 的斜率不存在，倾斜角为 $90°$.

(2)当 $u\neq 0$ 时，直线 l 的斜率 k 存在，且向量 $(1,k)$ 是直线 l 的一个方向向量.

(3)对于非零实数 λ，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 都是 l 的方向向量，而且直线 l 的任意两个方向向量一定共线.

◆ 探究点三　直线的倾斜角与方向向量的关系

例 3 (1)若直线 l 的一个方向向量是 $\boldsymbol{e}=(-1,\sqrt{3})$，则直线 l 的倾斜角是 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

(2)若直线 l 的倾斜角等于 $135°$，则下列向量中不是直线 l 的方向向量的是 ( )

A. $(2,2)$　　B. $(-3,3)$

C. $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$　　D. $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$

变式 若直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=\left(\sin\frac{\pi}{7},\cos\frac{\pi}{7}\right)$，则直线 l 的倾斜角 $\theta=$________.

[素养小结]

在运用直线的倾斜角与方向向量的关系时，常常由倾斜角求出斜率，再利用斜率与方向向量的关系来求解.

1.3 直线的方程

第1课时 直线方程的点斜式

【学习目标】

1. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的点斜式.
2. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的斜截式.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 直线方程的点斜式**

直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$,且斜率为 k,设 $Q(x,y)$ 是直线 l 上不同于点 P 的任意一点,因为点 P,Q 都在直线 l 上,所以可以用 P,Q 两点的坐标表示直线 l 的斜率:$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$,即__________.①

(1)方程①就是经过点 $P(x_0,y_0)$且斜率为 k 的直线 l 的方程.方程①称为直线方程的点斜式.

(2)方程①适用的条件:直线的斜率存在.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)直线 $y-3=k(x+1)$恒过定点$(-1,3)$.(　　)

(2)经过点 $P_0(x_0,y_0)$的所有直线都能用直线方程的点斜式来表示.(　　)

(3)方程 $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$与 $y-y_0=k(x-x_0)$表示的意义相同.(　　)

◆ **知识点二 直线方程的斜截式**

1. 若直线 l 与 y 轴的交点为$(0,b)$,则称______为直线 l 在 y 轴上的截距.

2. 直线方程的斜截式:若直线 l 经过点$(0,b)$且斜率为 k,则该直线方程的点斜式为 $y-b=k(x-0)$,即________,该方程中的 k 为直线 l 的斜率,b 为直线 l 在 y 轴上的截距.称 $y=kx+b$ 为直线方程的斜截式.

若直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$,且与 x 轴垂直,则直线 l 的斜率 k 不存在,此时它的特点是:直线 l 上任意一点的横坐标都是 x_0,所以直线 l 的方程为 $x=x_0$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)直线 l 在 y 轴上的截距是直线 l 与 y 轴的交点到原点的距离.(　　)

(2)直线 $x=a$ 与 x 轴交点的横坐标为 a,在 y 轴上的截距为 0.(　　)

(3)所有的直线都能用直线方程的斜截式来表示.(　　)

课中探究 考点探究 素养小结

◆ **探究点一 直线方程的点斜式**

例1 (1)已知直线 l 的倾斜角是 $135°$,且过点$(1,0)$,则下列四个点中在直线 l 上的是(　　)

A. $(0,-1)$　　B. $(-1,2)$

C. $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $(2,1)$

(2)求经过点 $P_0(-2,3)$,且满足下列条件的直线的方程,并画出直线.

①倾斜角 $\alpha=45°$;②与 x 轴垂直;③与 x 轴平行.

变式 已知直线 l 过点 $P(\sqrt{3},-1)$,且直线 l 的倾斜角是直线 $y=\sqrt{3}x$ 的倾斜角的 2 倍,则直线 l 的方程是________.

[素养小结]

1. 求直线方程的点斜式的步骤:定点 $P(x_0,y_0)$→定斜率 k(k 存在)→写出方程 $y-y_0=k(x-x_0)$.

2. 方程 $y-y_0=k(x-x_0)$可表示过点 $P(x_0,y_0)$的所有直线,但直线 $x=x_0$ 除外.

拓展 直线 $y=ax-3a+2(a\in\mathbf{R})$必过定点________.

◆ 探究点二　直线方程的斜截式

例 2 求满足下列条件的直线的方程.

(1)倾斜角为 $45°$,且在 y 轴上的截距为 2;

(2)倾斜角是直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角的 2 倍,与 y 轴的交点到坐标原点的距离为 3.

例 3 已知直线的斜率是 -1,写出在 y 轴上的截距分别为 $-2,0,2$ 的直线的方程,并在同一平面直角坐标系中画出这些直线.通过观察,指出方程 $y=-x+b$ 所表示的直线具有的与 b 取值无关的特征.

变式 已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$,且和两坐标轴围成面积为 3 的三角形,求直线 l 的方程.

[素养小结]

对直线方程的斜截式的透析

(1)斜截式是点斜式的一个特例,只要点斜式中的点在 y 轴上,就可以直接用斜截式表示.

(2)直线方程的斜截式与一次函数的关系:当 $k\neq0$ 时,直线方程的斜截式 $y=kx+b$ 是一次函数的形式;而在一次函数 $y=kx+b$ 中,k 是直线的斜率,常数 b 是直线在 y 轴上的截距.

拓展 [2024·南京高二期中] 已知将直线 l 向左平移 3 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度后,所得直线与原直线重合,则直线 l 的斜率为 (　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{2}{3}$

◆ 探究点三　点斜式、斜截式的应用

例 4 在平面直角坐标系 xOy 中,$A(1,3)$,$B(4,2)$,若直线 $y=ax-2a$ 与线段 AB 有公共点,求实数 a 的取值范围.

变式 已知直线 l 过点 $(4,-3)$,且直线 l 在 y 轴上的截距和直线 l 与 x 轴交点的横坐标相等,则直线 l 的方程为 (　　)

A. $y=-x+1$

B. $y=-\frac{3}{4}x$

C. $y=-x+1$ 或 $y=-\frac{3}{4}x$

D. 以上均不正确

[素养小结]

当给出了直线方程的点斜式或斜截式时,可以先由直线的方程准确地找出直线的斜率与截距,再结合图形来解决问题.

拓展 直线 $l_1:y=2x$ 和 $l_2:y=kx+1$ 与 x 轴围成的三角形是等腰三角形,则满足条件的 k 的取值集合为____________.

第 2 课时　直线方程的两点式

【学习目标】

1. 根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的两点式.
2. 根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的截距式.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　直线方程的两点式

已知直线 l 上的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$），点 $Q(x,y)$ 为直线 l 上其他的任意一点. 对于倾斜角不为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线，由直线上任意两点算出的斜率是一个恒定的常数，因此 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，即________，这个方程称为直线方程的两点式.

【诊断分析】 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)已知直线过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则直线方程的两点式一定存在.（　）

(2)能用两点式表示的直线也可用点斜式表示.（　）

◆ 知识点二　直线方程的截距式

若直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a,0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,b)$，其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，则由两点式可得直线 l 的方程为 $\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$，整理得________. 通常，称方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（其中 $ab\neq 0$）为直线方程的截距式. 其中，a 为直线与 x 轴交点的横坐标（即直线在 x 轴上的截距），b 为直线与 y 轴交点的纵坐标（即直线在 y 轴上的截距）.

【诊断分析】 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示.（　）

(2)能用截距式表示的直线都能用两点式表示.（　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　直线方程的两点式

例 1　已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(-3,2)$，$B(5,-4)$，$C(0,-2)$.

(1)求 BC 边所在直线的方程；

(2)求 BC 边上的中线所在直线的方程.

变式　已知直线 l 经过 $(-2,-2)$，$(2,4)$ 两点，点 $(1348,m)$ 在直线 l 上，则 m 的值为（　）

A. 2021　　B. 2022

C. 2023　　D. 2024

[素养小结]

1. 由两点式求直线方程的步骤

(1)设出直线所经过点的坐标.

(2)根据题中的条件，找到有关方程，解出点的坐标.

(3)由直线方程的两点式写出直线方程.

2. 当已知两点坐标，求过这两点的直线方程时，首先要判断是否满足两点式的适用条件：两点的连线不平行于坐标轴. 若满足，则考虑用两点式求方程.

◆ 探究点二　直线方程的截距式

例 2　求经过点 $A(3,4)$且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线方程.

变式　(1)已知过点 $P(3,1)$的直线 l 在 x 轴上的截距是其在 y 轴上截距的 3 倍,则满足条件的直线 l 的方程为________________.

(2)(多选题)若直线 $ax+y+3-a=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距相等,则实数 a 的值可以为　(　　)

A. -1　　B. 1

C. -3　　D. 3

[素养小结]

用直线方程的截距式解决问题的优点及注意事项

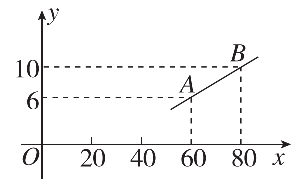
(1)优点:①由截距式可直接确定直线与 x 轴和 y 轴的交点的坐标,因此根据截距式画直线比较方便.

②在解决与截距有关或直线与坐标轴围成的三角形面积、周长等问题时,使用截距式更简便.

(2)注意事项:当直线与坐标轴平行时,有一个截距不存在;当直线通过原点时,两个截距均为零.在这两种情况下都不能用截距式,故解决问题时要注意分类讨论.

◆ 探究点三　两点式、截距式的应用

例 3　(1)某地汽车客运公司规定旅客可随身携带一定重量的行李,若超过规定,则需要购买行李票,行李票费用 y(元)与行李重量 x(kg)的关系如图所示,则旅客最多可免费携带行李的重量为　(　　)



A. 20 kg　　B. 25 kg

C. 30 kg　　D. 80 kg

(2)已知直线 l 过点 $P(-2,1)$,直线 l 分别与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴交于点 A,B,O 为原点.若$\triangle AOB$ 的面积为$\frac{1}{2}$,求直线 l 的方程.

变式　入射光线从点 $P(2,1)$出发,经 x 轴反射后,通过点 $Q(4,3)$,则入射光线所在直线的方程为________.

[素养小结]

(1)若已知两点坐标,则一般选用直线方程的两点式,若已知两点是直线与坐标轴的交点,则用直线方程的截距式.(2)不论选用哪种形式的直线方程,都要注意所选形式的方程的限制条件,对特殊情况下的直线要单独讨论解决.

第3课时　直线方程的一般式

【学习目标】

1. 根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的一般式.
2. 会进行直线方程的五种形式之间的转化.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　直线方程的一般式

关于 x,y 的二元一次方程________(其中 A,B 不全为 0)表示的是一条直线，称它为直线方程的________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)直线方程的一般式都可以化为截距式.　(　　)

(2)直线方程的一般式都可以化为斜截式.　(　　)

(3)平面直角坐标系中的任何一条直线都可以用直线方程的一般式表示.　(　　)

◆ 知识点二　直线方程的点法式

若直线 l 过点 $P_0(x_0,y_0)$，且它的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，则直线 l 的方程为________，称这个方程为直线方程的点法式.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)任何直线的方程都可以化为点法式.　(　　)

(2)直线 $Ax+By+C=0$ 的一个法向量的坐标为 $(B,-A)$.　(　　)

(3)直线 $Ax+By+C=0$ 的一个方向向量的坐标为 $(B,-A)$.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　直线方程的一般式

例1 根据下列条件分别写出直线的方程，并化为一般式.

(1)斜率是 $\sqrt{3}$，且经过点 $A(5,3)$；

(2)经过 $A(-1,5)$，$B(2,-1)$ 两点；

(3)在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $-3,-1$；

(4)经过点 $B(4,2)$，且平行于 x 轴.

变式1 若方程 $(m^2-4)x+(m^2-2m)y+1=0$ 表示一条直线，则实数 m 满足　(　　)

A. $m\neq0$

B. $m\neq2$

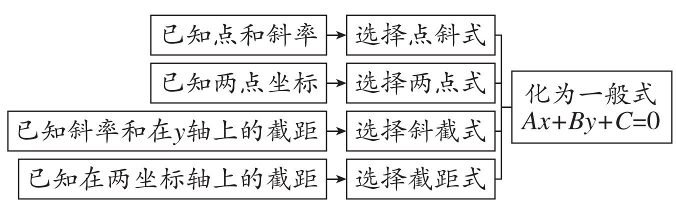
C. $m\neq\pm2$

D. $m\neq\pm2$ 且 $m\neq0$

变式2 求直线 $x-2y+2=0$ 绕点 $(-2,0)$ 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后所得到的直线的方程.

[素养小结]

1. 求直线方程的一般式的方法



2. 由直线方程的一般式转化为四种特殊形式时，一定要注意转化的前提条件.

◆ 探究点二　直线方程一般式的应用

例 2　设直线 l 的方程为 $(m^2-2m-3)x-(2m^2+m-1)y+6-2m=0$.

(1)若直线 l 在 x 轴上的截距为 -3,求 m 的值;

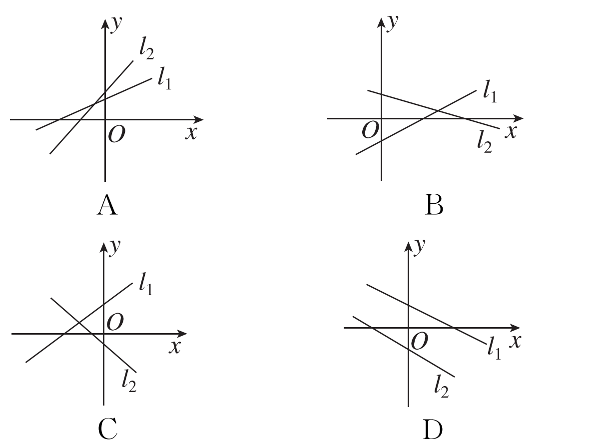
(2)若直线 l 的斜率为 1,求 m 的值.

变式　(1)[2024·北京101中学高二月考] 由曲线 $2|x|+|y|=2$ 围成的图形的面积为　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 8

(2)在同一平面直角坐标系中,直线 $l_1:ax-y+b=0$,$l_2:bx+y-a=0(ab\neq 0)$的位置可能是　(　　)



[素养小结]

(1)若方程 $Ax+By+C=0$ 表示直线,则需满足 A,B 不同时为 0.

(2)在直线方程 $Ax+By+C=0$ 中,令 $x=0$ 可得直线在 y 轴上的截距,令 $y=0$ 可得直线在 x 轴上的截距.若确定直线斜率存在,则可将一般式化为斜截式.

(3)解分式方程注意验根.

拓展　已知直线 l 的方程为 $(a+1)x+y+2-a=0$.

(1)若 l 在两坐标轴上的截距相等,求 a 的值;

(2)若 l 不经过第二象限,求实数 a 的取值范围.

◆ 探究点三　直线方程的点法式

例 3　(1)直线 l 过点 $A(3,-1)$,且 l 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,2)$,则直线 l 的方程的点法式为________.

(2)在△ABC 中,$A(3,2)$,$B(1,1)$,$C(2,3)$,则 AB 边上的高所在直线的方程是　(　　)

A. $2x+y-7=0$　　B. $2x-y-1=0$

C. $x+2y-8=0$　　D. $x-2y+4=0$

变式　过点 $P(-1,2)$,且与直线 $\frac{x-2}{7}=\frac{y+2}{5}$ 垂直的直线的方程的点法式为________.

[素养小结]

在求直线方程的点法式时,一定要区别直线的法向量与方向向量,结合向量的知识准确找出直线的一个法向量,再由点法式,写出直线的方程.

◆ 探究点四　直线过定点问题

例 4　(1)无论 k 为何值,直线 $(k+2)x+(1-k)y-4k-5=0$ 都过一个定点,则该定点的坐标为　(　　)

A. $(1,3)$　　B. $(-1,3)$

C. $(3,1)$　　D. $(3,-1)$

(2)已知实数 a,b 满足 $a+2b=1$,则直线 $ax+3y+b=0$ 过定点　(　　)

A. $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$

C. $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$

变式 已知 $A(-2,4)$，$B(4,2)$，直线 $l:ax-y-2=0$ 与线段 AB 恒相交，求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

(1)题目给出已知直线方程含参，则直线一般过定点；

(2)直线过定点，当斜率存在时，将直线方程化为点斜式，可得直线过定点 P，当斜率不存在时，根据直线方程也可得直线过定点 P，从而可得答案.

1.4 两条直线的平行与垂直

第 1 课时 两条直线平行

【学习目标】

1. 理解两条直线平行的条件.
2. 能根据斜率与法向量判定两条直线平行.
3. 能应用两条直线平行解决相关问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点 两条直线相交、平行、重合

已知直线 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$，则

l_1 与 l_2 相交⇔________；

l_1 与 l_2 平行⇔________________；

l_1 与 l_2 重合⇔________________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)如果两条直线平行，那么这两条直线的斜率一定相等. ( )

(2)如果两条直线平行，那么这两条直线的法向量一定相等. ( )

(3)如果两条直线平行，那么这两条直线的倾斜角一定相等. ( )

(4)如果两条直线平行，那么这两条直线的方向向量一定相同. ( )

(5)若两条直线的斜率都不存在，且两条直线不重合，则这两条直线平行. ( )

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 两条直线平行的判定

例 1 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：

(1) $l_1:y=2x+1$，$l_2:y=2x-1$；

(2) $l_3:2x-y-7=0$，$l_4:x+2y-1=0$.

例 2 根据下列给定的条件，判断直线 l_1 与直线 l_2 是否平行.

(1) l_1 经过点 $A(2,1)$，$B(-3,5)$，l_2 经过点 $C(3,-3)$，$D(8,-7)$；

(2) l_1 经过点 $E(0,1)$，$F(-2,-1)$，l_2 经过点 $G(3,4)$，$H(2,3)$；

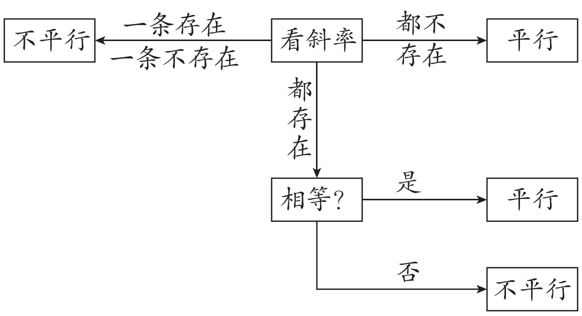
(3) l_1 的倾斜角为 $60°$，l_2 经过点 $M(1,\sqrt{3})$，$N(-2,-2\sqrt{3})$；

(4) l_1 平行于 y 轴，l_2 经过点 $P(0,-2)$，$Q(0,5)$.

变式 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别为 $A(3,7)$,$B(4,6)$,$C(1,-2)$,$D(0,-1)$,判断该四边形的形状.

[素养小结]

判断两条不重合的直线是否平行有两种方法:一是判断两直线的法向量或方向向量是否共线;二是利用斜率判定.利用斜率判定两条不重合的直线平行的方法如下:



拓展 若一束光线从点 $P(0,1)$ 出发,射到 x 轴上的 A 点后被反射,反射光线过点 $Q(2,3)$,则点 A 的坐标为________.

◆ 探究点二 已知平行求直线方程

例3 已知直线 l 经过点 $M(2,1)$,且与直线 m:$2x-y=0$ 平行,则 l 的方程为__________.

变式 过点 $P(1,2)$ 作直线 l,若点 $A(2,3)$,$B(4,-5)$ 到它的距离相等,则直线 l 的方程为 ( )

A. $4x+y-6=0$ 或 $x=1$

B. $3x+2y-7=0$

C. $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$

D. $3x+2y-7=0$ 或 $x=1$

[素养小结]

求与已知直线平行的直线的方程时,常常有两种方法:①由两平行直线(倾斜角不为 $90°$)的斜率相等,求出所求直线的斜率,再结合条件求解;②由两直线的法向量或方向向量共线来求解.

◆ 探究点三 已知两直线平行求参数

例4 (1)已知直线 l_1:$(m+3)x+5y=5-3m$,l_2:$2x+(m+6)y=8$,若 $l_1 /\!/ l_2$,则 m 的值是________.

(2)直线 l 经过点 $A(m,2)$,$B(-1,m)$,若直线 l 与直线 $y=x+1$ 平行,则 $m=$________.

变式 若直线 $ax+(1-b)y+5=0$ 和直线 $(1+a)x-y-b=0$ 同时平行于直线 $x-2y+3=0$,则 ( )

A. $a=\frac{1}{2}$,$b=0$　　B. $a=2$,$b=0$

C. $a=-\frac{1}{2}$,$b=0$　　D. $a=-\frac{1}{2}$,$b=2$

[素养小结]

(1)当直线方程中存在字母参数时,不仅要考虑到斜率存在的一般情况,也要考虑到斜率不存在的特殊情况.同时还要注意 x,y 的系数不能同时为零这一隐含条件.

(2)在判断两直线平行时,可直接利用向量共线或直线方程的系数间的关系得出结论.

拓展 已知直线 l_1:$x+y\sin\alpha-1=0$ 和直线 l_2:$2x\cdot\sin\alpha+y+1=0$,若 $l_1/\!/l_2$,求 α 的值.

第2课时　两条直线垂直

【学习目标】

1. 理解两条直线垂直的条件.
2. 能根据斜率或方向向量、法向量判定两条直线垂直.
3. 能应用两条直线垂直解决相关问题.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点　两条直线垂直的判定

对于两条不重合的直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 和 $l_2: y=k_2x+b_2$，$l_1\perp l_2\Leftrightarrow$________.

特殊地，当 l_1，l_2 中有一条直线的斜率不存在时，说明斜率不存在的直线与 x 轴垂直，因此，若 $l_1\perp l_2$，则另一条直线与 x 轴____________，即另一条直线的斜率为________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若两条直线中有一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率存在，则这两条直线垂直.　(　　)

(2)已知直线 l_1 的倾斜角为 α，直线 l_2 的倾斜角为 β，若 $l_1\perp l_2$，则 $\alpha-\beta=90°$.　(　　)

(3)已知直线 l_1，l_2 的一个方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(1,k_1)$，$\boldsymbol{b}=(1,k_2)$，若 $l_1\perp l_2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，从而 $k_1k_2=-1$.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　两条直线垂直的判定

例1 (1)已知直线 $l: x-y+3=0$，则下列直线中与 l 垂直的是　(　　)

A. $2x+y=0$　　B. $5x-y+3=0$

C. $x+y+9=0$　　D. $3x-y-7=0$

(2)判断满足下列条件的直线 l_1 与 l_2 是否垂直.

①l_1 经过点 $A(-3,-4)$，$B(1,3)$，l_2 经过点 $M(-4,-3)$，$N(3,1)$；

②l_1 的斜率为 -10，l_2 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(10,1)$；

③l_1 经过点 $C(1,4)$，$D(1,1)$，l_2 经过点 $E(-1,4)$，$F(1,4)$.

变式 解答下列各题：

(1)已知点 $A(5,3)$，$B(10,6)$，$C(3,-4)$，$D(-6,11)$，求证：$AB\perp CD$；

(2)已知直线 $l_1: 3x+5y-10=0$，$l_2: 15x-9y+8=0$，求证：$l_1\perp l_2$.

[素养小结]

利用直线的斜率判定两直线垂直时，一般先由图形进行猜测，然后利用直线的斜率关系或方向向量、法向量来进行判断.在利用斜率进行判断时，一定要考虑直线的斜率是否存在.

◆ 探究点二　已知垂直求直线方程或参数

例 2 (1)过点 $P(1,-1)$且垂直于直线 l:$x-2y+1=0$ 的直线的方程为 (　　)

A. $x+2y+1=0$

B. $2x+y-1=0$

C. $x-2y-3=0$

D. $2x-y+3=0$

(2)[2024・福建厦门高二期中] 直线 l_1:$ax-2y+3=0$ 与直线 l_2:$x+(a-1)y-2=0$ 互相垂直,则 $a=$ (　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. -1

变式 (1)已知$\triangle ABC$ 的顶点 $A(5,5)$,AC 边上的高所在直线的方程为 $3x+2y-7=0$,则 AC 边所在直线的方程为 (　　)

A. $x-2y+5=0$

B. $2x-3y+3=0$

C. $x+2y-15=0$

D. $2x-3y+5=0$

(2)已知点 $A(-2,2)$,$B(6,4)$,$H(5,2)$,H 是$\triangle ABC$ 的垂心,则点 C 的坐标为 (　　)

A. $(6,2)$　　B. $(-2,2)$

C. $(-4,-2)$　　D. $(6,-2)$

[素养小结]

求与已知直线垂直的直线的方程时,常常有两种方法:①由两垂直直线(倾斜角不为 $90°$)的斜率之积为-1,求出所求直线的斜率,再结合条件求解;②由两直线的法向量或方向向量垂直来求解.

◆ 探究点三　平行和垂直的综合问题

例 3 (1)已知 a,b 为正数,且直线 $2x-(b-3)y+6=0$ 与直线 $bx+ay-5=0$ 互相垂直,则 $2a+3b$ 的最小值为________.

(2)已知 $A(-4,3)$,$B(2,5)$,$C(6,3)$,$D(-3,0)$四点,若顺次连接 A,B,C,D 四点,试判定四边形 $ABCD$ 的形状.

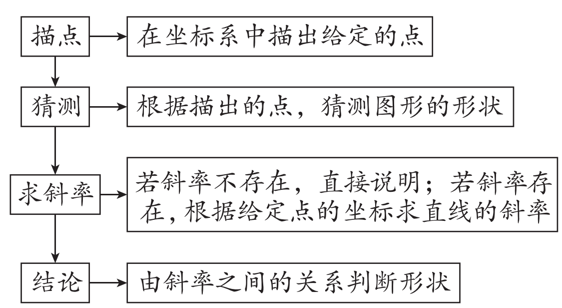
变式 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$A(0,3)$,$B(4,1)$,$C(5,2)$,且 E 为线段 CD 的中点.

(1)求线段 CD 的垂直平分线 l_1 的方程的一般式;

(2)直线 l_2 经过点 D,且 $BE/\!/l_2$,求 l_2 在 y 轴上的截距.

[素养小结]

利用两条直线平行或垂直判定图形形状的步骤



1.5 两条直线的交点坐标

【学习目标】

能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点 两条直线的交点**

1. 一般地,对于两条不重合的直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$,我们可以用直线的斜率(斜率存在时)或法向量先定性判断两条直线是否相交,若相交,则依据直线方程的概念可知,两条直线 l_1, l_2 交点的坐标就是________________,因此,可通过求解方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 得到两条直线 l_1, l_2 的交点坐标.

2. 直线系方程

已知直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交于点 P,则过点 P 的直线(除 l_2 外)方程可写为 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若两直线的方程组成的方程组有解,则两直线相交. ( )

(2)若两直线相交,则交点坐标一定是两直线方程所组成的二元一次方程组的解. ( )

(3)若直线 $2x+y+1=0$ 与直线 $x-y-4=0$ 的交点坐标为 (a,b),则 $a-b=4$. ( )

课中探究 考点探究 素养小结

◆ **探究点一 两条直线的交点**

例 1 分别判断下列直线是否相交,若相交,求出它们的交点坐标.

(1) $l_1:2x-y=7$ 和 $l_2:3x+2y-7=0$;

(2) $l_1:2x-6y+4=0$ 和 $l_2:4x-12y+8=0$;

(3) $l_1:4x+2y+4=0$ 和 $l_2:y=-2x+3$.

变式 (1)若直线 $kx-k+y+1=0$ 与直线 $x+3y-3=0$ 的交点在第一象限,则实数 k 的取值范围为 ( )

A. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

(2)若三条直线 $2x+3y+8=0$, $x-y-1=0$, $x+ky=0$ 相交于一点,则 $k=$________.

[素养小结]

两条直线相交的判定方法

方法一:联立直线方程,解方程组,若有且仅有一组解,则两直线相交.

方法二:两直线的斜率都存在且斜率不相等.

方法三:两直线的斜率一个存在,另一个不存在.

拓展 (多选题)若直线 $l_1:3x-y=4$, $l_2:x+y=0$, $l_3:2x+3my=4$ 不能构成三角形,则 m 的取值可能为 ( )

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{9}$　　D. $-\frac{2}{9}$

◆ 探究点二　求过两条直线交点的直线方程

例 2 (1)求经过两直线 $l_1:3x+4y-2=0$ 和 $l_2:2x+y+2=0$ 的交点且过坐标原点的直线 l 的方程.

(2)求经过直线 $l_1:x-2y+4=0$ 和 $l_2:x+y-2=0$ 的交点 P 且与直线 $l_3:3x-4y+5=0$ 垂直的直线 l 的方程.

变式 1 [2024·新疆和田高二期中] 已知直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $3x+y+9=0$ 相交于点 P.

(1)求过点 P 且平行于直线 $5x-4y-1=0$ 的直线 l_1 的方程;

(2)求过点 P 且垂直于直线 $3x+4y-3=0$ 的直线 l_2 的方程.

变式 2 已知在△ABC 中,$A(-8,2)$,AB 边上的中线 CE 所在直线的方程为 $x+2y-5=0$,AC 边上的中线 BD 所在直线的方程为 $2x-5y+8=0$,求直线 BC 的方程.

[素养小结]

求过两直线交点的直线方程,先解方程组求出两直线的交点坐标,再结合其他条件写出直线方程,也可借助直线系方程,利用待定系数法求出直线方程.常用的直线系方程如下:与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程是 $Ax+By+m=0$($m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq C$);与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程是 $Bx-Ay+m=0$($m\in\mathbf{R}$);若两直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 有交点,则过 l_1 与 l_2 交点的直线系方程为 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$($\lambda$ 为待定常数,直线系方程中不包括直线 l_2 的方程).

◆ 探究点三　与交点有关的证明问题

例 3 已知 $A(-1,2)$,$B(2,1)$,$C(0,4)$是△ABC 的三个顶点,求证:△ABC 的三条高所在直线相交于一点.

变式 已知直线 l 的方程为$(a-2)y=(3a-1)x-1$,求证:无论 a 为何值,直线 l 总经过第一象限.

[素养小结]

证明平面几何中的三条直线交于一点的基本思路:先求其中两条直线的交点坐标,然后证明这一点在第三条直线上.